Vektoranalysis

Oberflächenintegrale

Vektoranalysis

Oberflächenintegrale

Inhalt

Übersicht:

- Rückblick Integration
- Fluss durch eine Fläche
- Herleitung Oberflächenintegral
- Parametrisierung von Flächen
- Berechnung Oberflächenintegral

Vektoranalysis

Integrale

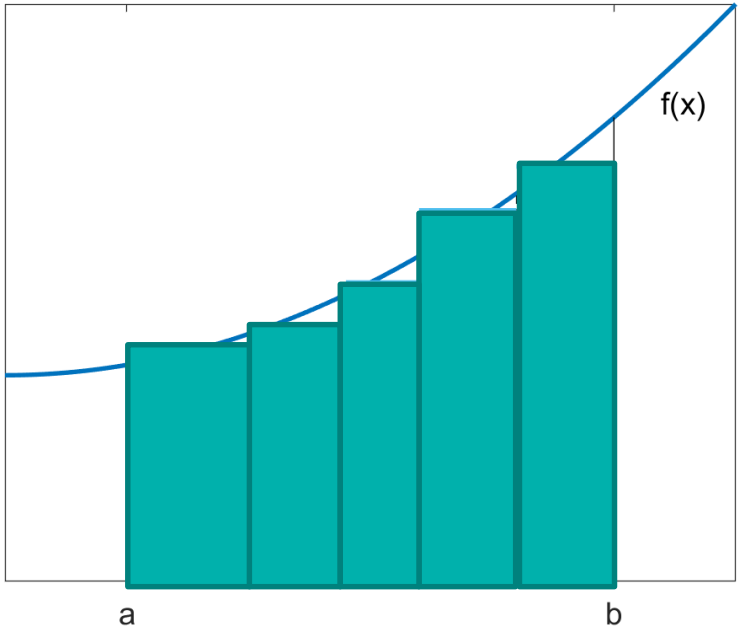
Rückblick…

Welche Integrale kennen wir schon?

1D-Integrale

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

Kann als Fläche unter der Kurve interpretiert werden…



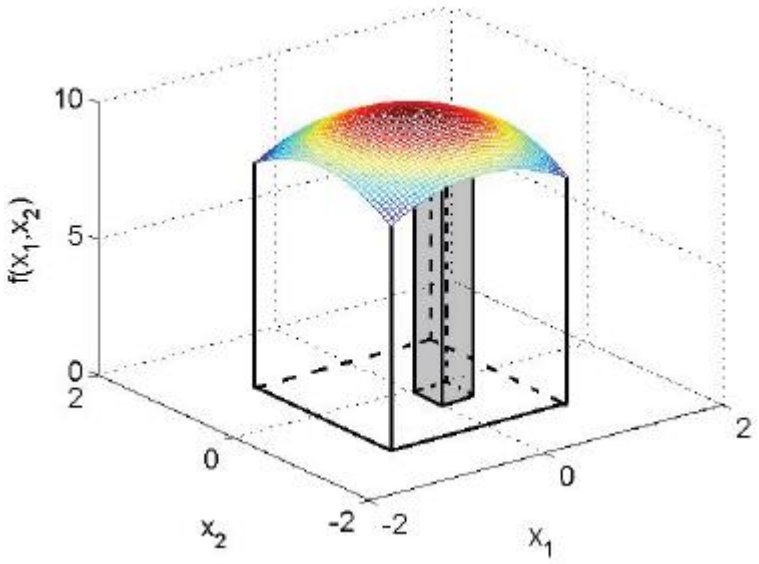
Integrale

Rückblick…

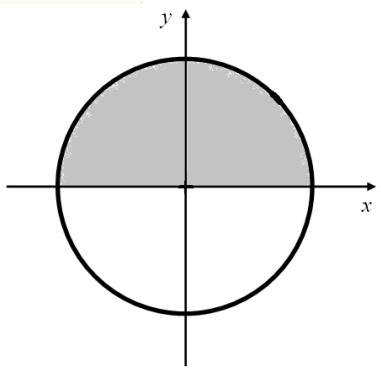
Welche Integrale kennen wir schon?

2D-Integrale (in 2D)

$$\int_1^3 \int_0^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$



Kann als Volumen unter dem Funktionsgraphen interpretiert werden…



Kann als Summe über die Fläche interpretiert werden…

Gesamtladung aus Flächen-ladungsdichte

Vektoranalysis

Integrale

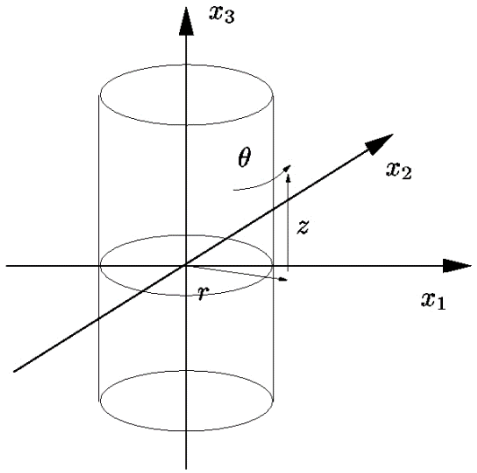
Rückblick…

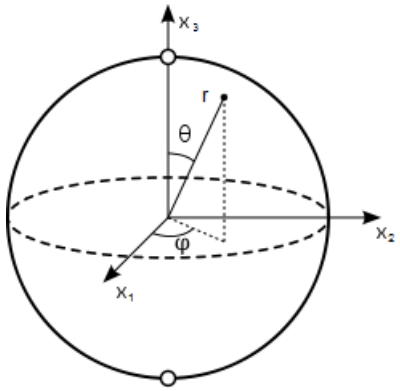
Welche Integrale kennen wir schon?

3D-Integrale (in 3D)

$$\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-2}^{2} f(x_1, x_2 x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

Kann als Summe über das Volumen interpretiert werden…





Vektoranalysis

Integrale

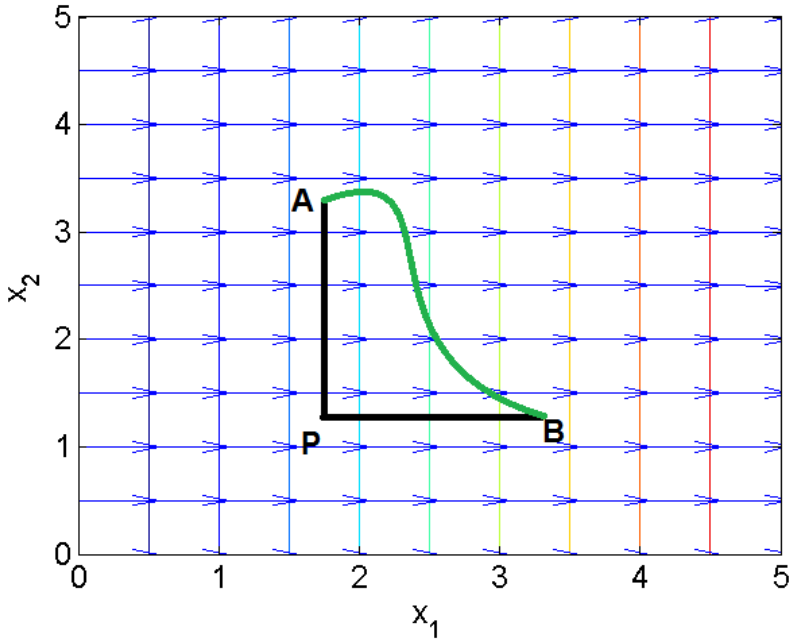
Rückblick...

Welche Integrale kennen wir schon?

Wegintegrale (1D in 2D/3D)

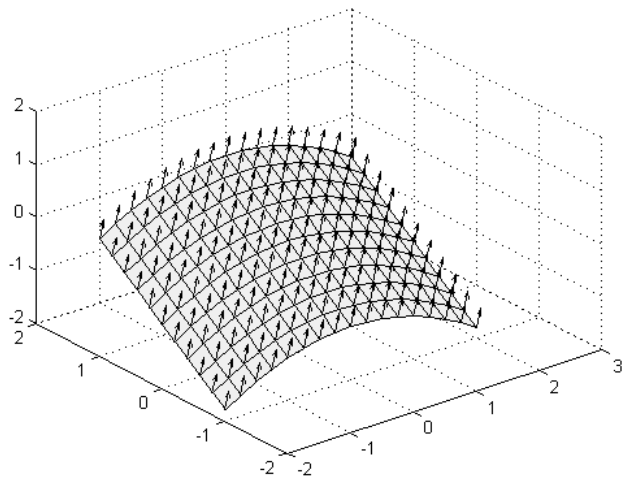
$$\int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$$

Kann als Arbeit entlang des Weges interpretiert werden



Rückblick...

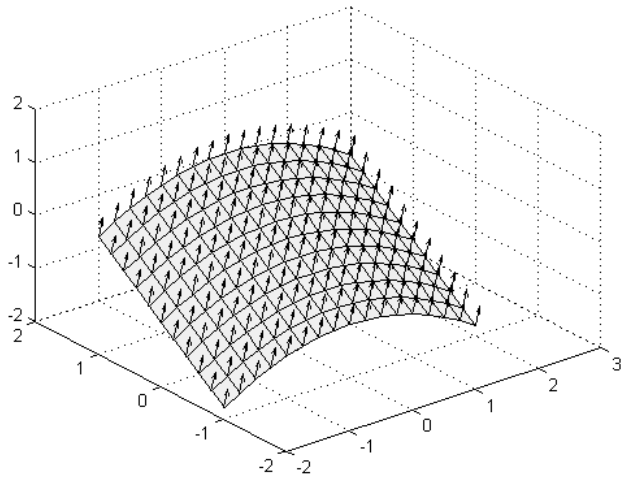
Können wir auch über Flächen integrieren, die im 3D Raum liegen?



→ Oberflächenintegrale

Vektoranalysis

Fluss durch eine Fläche



Gedankenexperiment

Gegeben:

Strömungsfeld mit Stromdichte $\vec{u}$
(Produkt aus Dichte und Geschwindigkeit)

Gesucht:

Fluss der physikalischen Größe pro Zeiteinheit durch eine Fläche A

Bemerkung:

Die Dichte kann hier z.B. als Ladungs- oder Massendichte interpretiert werden!

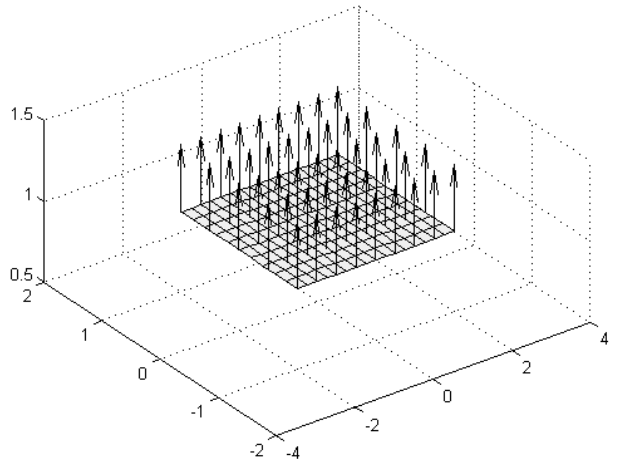
Vektoranalysis

Fluss durch eine Fläche

Vereinfachung

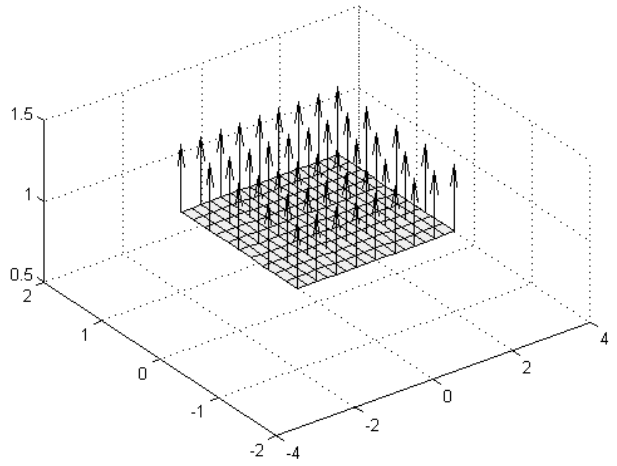
Wir betrachten ein rechteckiges, ebenes Flächenstück.

Das Vektorfeld sei senkrecht zur Fläche und konstant.



Wie viele Teilchen fließen pro Zeiteinheit Δt durch die Fläche?

Fluss durch eine Fläche



Frage:

Wie viele Teilchen fließen pro Zeiteinheit Δt durch die Fläche?

Antwort:

In der Zeit Δt legen die Teilchen folgenden Weg zurück: $\Delta s = |\vec{u}| \cdot \Delta t$

Damit werden alle Teilchen gezählt, die sich im Abstand Δs und kleiner unter der Fläche befinden.

Dies ergibt folgendes Volumen: $\Delta V = \Delta A \cdot \Delta s = \Delta A \cdot |\vec{u}| \cdot \Delta t$

Volumenstrom: $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \Delta A \cdot |\vec{u}|$

Vektorielles Flächenelement

Definition und Satz:

Das vektorielle Flächenelement $\overrightarrow{\Delta A}$ ist wie folgt definiert:

- der Vektor $\overrightarrow{\Delta A}$ steht senkrecht auf dem Flächenelement ΔA

- der Betrag von $\overrightarrow{\Delta A}$ entspricht dem Flächeninhalt von ΔA

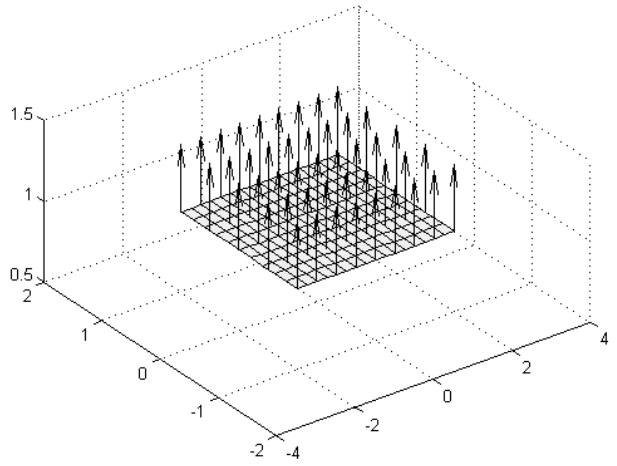
Es sei $\vec{N}$ der normierte Normalenvektor zum Flächenelement ΔA. Dann gilt:

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\Delta A} = \vec{N} \cdot \Delta A$$

Vektoranalysis

Vektorielles Flächenelement

Anwendung:



$\vec{u}$ steht senkrecht zur Fläche, daher gilt…

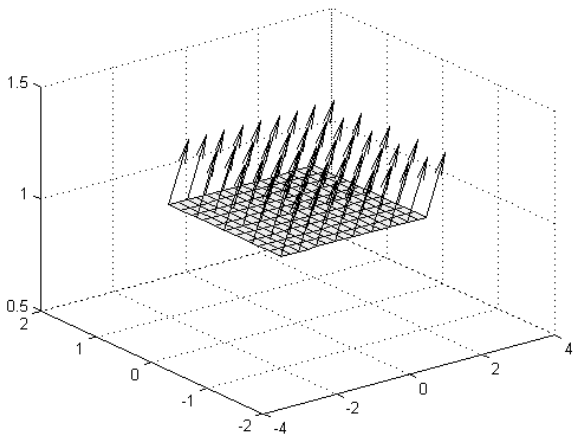
$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\Delta A} = \vec{u} \cdot \left(\vec{N} \cdot \Delta A \right)$$

Vorteil: Diese Formel ist allgemein anwendbar!

Vektoranalysis

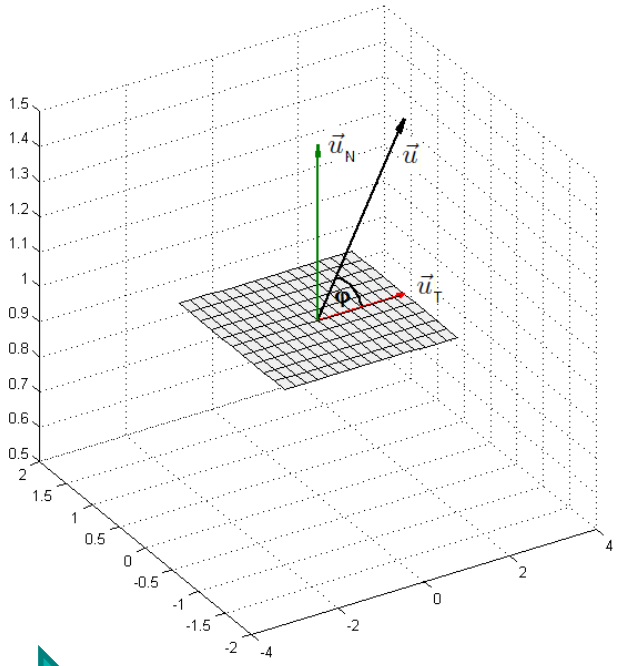
Fluss für allgemeinere Vektorfelder

Modifikation des Vektorfeldes



Das Vektorfeld bleibt konstant, soll jetzt aber im Winkel φ zur Fläche stehen.

➡ Wie erhalten wir jetzt den Volumenstrom?



Grundidee:

Wir zerlegen das Vektorfeld in zwei Anteile:

- senkrechten Anteil zur Fläche $\overrightarrow{u_N}$
- tangentialen Anteil zur Fläche $\overrightarrow{u_T}$

Ergebnis: Nur der senkrechte Anteil trägt bei!

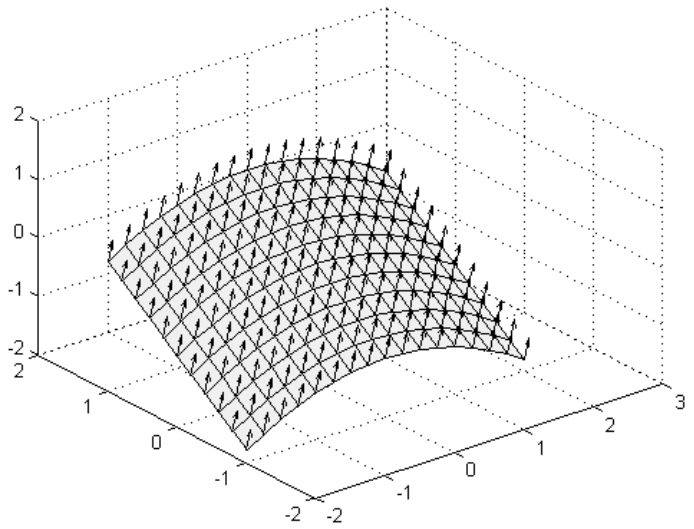
➡ $$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \vec{u}_N \cdot \overrightarrow{\Delta A} = \left(\vec{u} \cdot \vec{N}\right) \cdot \Delta A$$ ➡ Formel bleibt gleich!

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

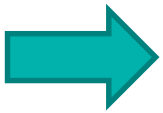
Allgemeine Situation:

Wir betrachten eine beliebige Fläche und beliebiges Vektorfeld.



Vorgehensweise:

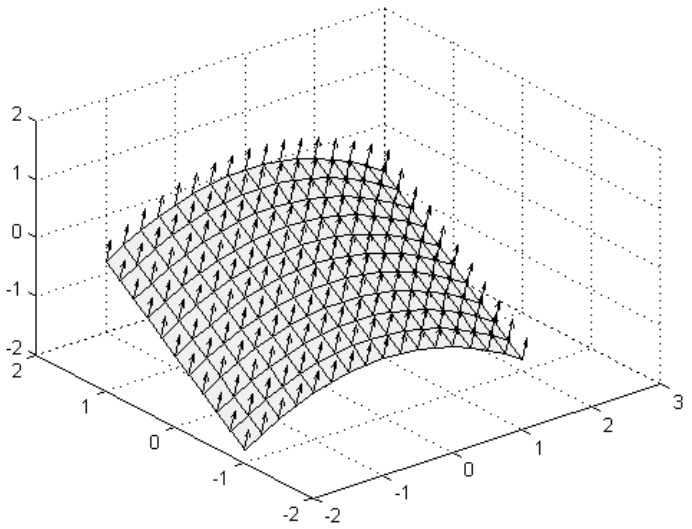
Wir kennen den Volumenstrom (Fluss) für kleine, ebene Rechteckflächen.



Wir zerlegen die allgemeine Fläche in kleine, ebene Rechtecke und summieren

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



Allgemeine Situation:

Wir betrachten eine beliebige Fläche und beliebiges Vektorfeld.

Fluss für i-tes Rechteck:

$$\frac{\Delta V_i}{\Delta t} = \left(\vec{u}_i \cdot \vec{N}_i\right) \cdot \Delta A_i$$

Gesamtfluss:

Wir summieren über alle Teilflächen ΔA_i…

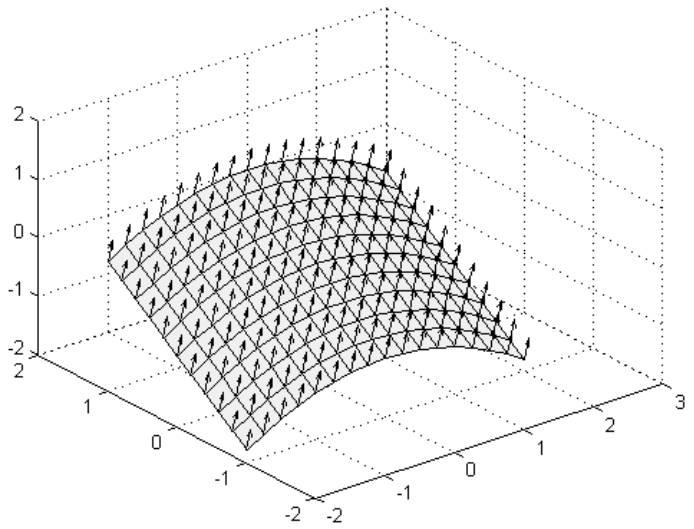
$$\Phi \approx \sum_i \frac{\Delta V_i}{\Delta t} = \sum_i \left(\vec{u}_i \cdot \vec{N}_i\right) \cdot \Delta A_i$$

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Allgemeine Situation:

Wir betrachten eine beliebige Fläche und beliebiges Vektorfeld.



Gesamtfluss

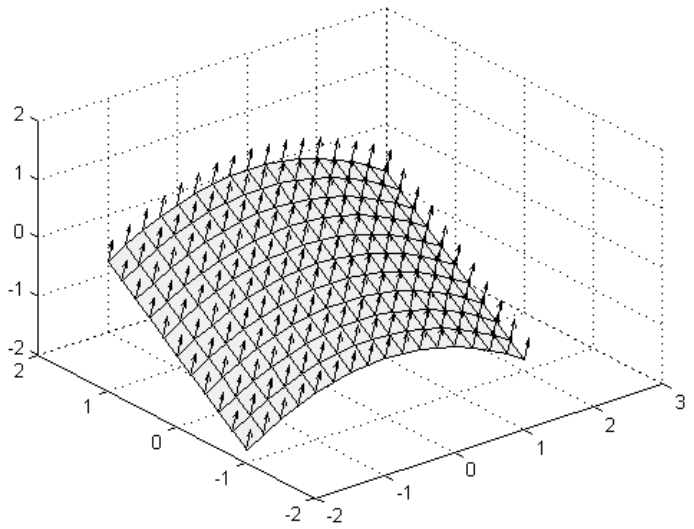
Wir lassen die Größe der Teilflächen gegen Null gehen: $\Delta A \to 0$

$$\Phi \approx \sum_i \left(\vec{u}_i \cdot \vec{N}_i\right) \cdot \Delta A_i \quad \Rightarrow \quad \Phi = \iint \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \iint \vec{u} \cdot \vec{N}\, dA$$

(Oberflächenintegral)

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



Zusammenfassung:

Wir suchen den Fluss eines Vektorfeldes $\vec{u}$ durch eine Fläche F.

Dies führte auf eine Riemannsumme über kleine, ebene Rechtecke.

Der Grenzübergang liefert das *Oberflächenintegral*:

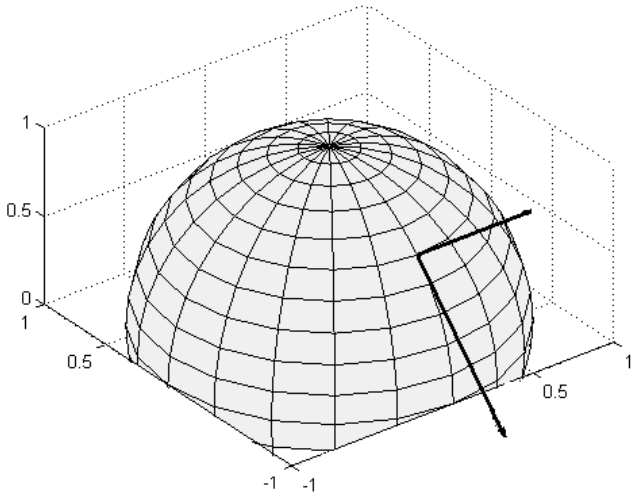
$$\Phi = \iint \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \iint \vec{u} \cdot \vec{N}\, dA$$

Aufgabe:

Wir müssen analog zum Wegintegral die Fläche parametrisieren und die Flächennormale bestimmen.

Parametrisierung einer Fläche

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Wir nutzen Kugelkoordinaten…

$$x_1 = r \sin\theta \ \cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$x_2 = r \sin\theta \ \sin\varphi \qquad 0 \le \theta \le \pi/2$$

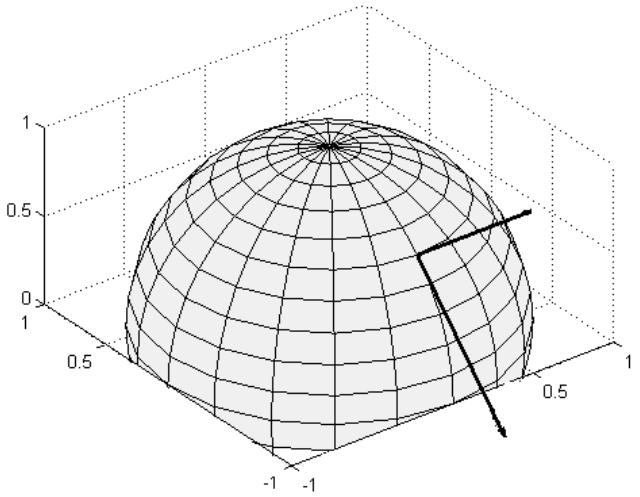
$$x_2 = r \ \cos\theta$$

Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}: [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Parametrisierung einer Fläche

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Wie bei der Wegparametrisierung können wir bzgl. der Parameter ableiten…

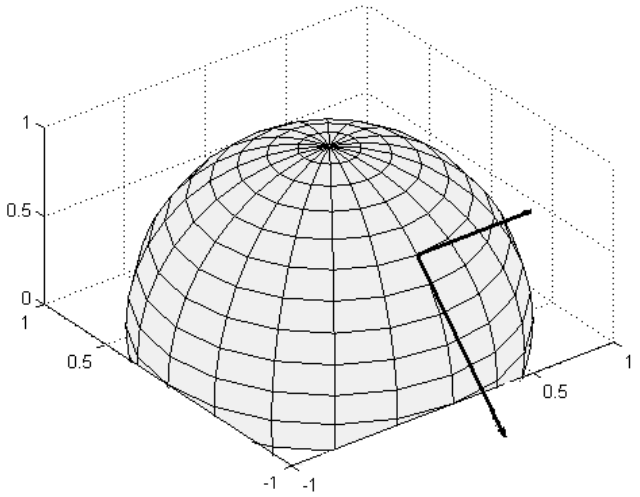
$$\partial_\theta \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\ \cos\varphi \\ \cos\theta\ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Welche Bedeutung haben diese beiden Vektoren??

Vektoranalysis

Tangentialvektoren

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ableitung:

$$\partial_\theta \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\ \cos\varphi \\ \cos\theta\ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

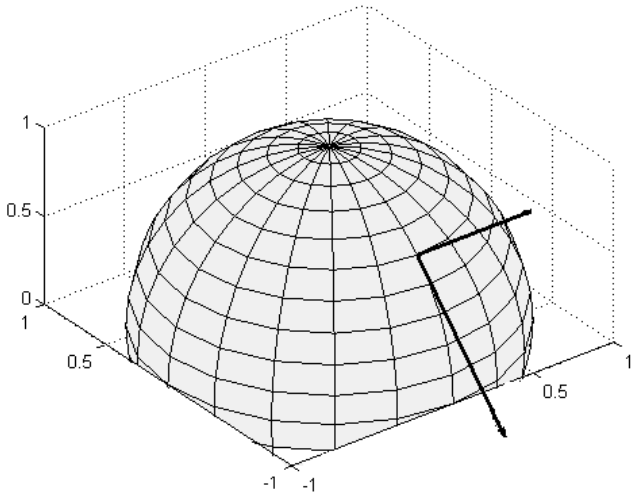
Beispiel in Skizze: $\varphi = \frac{3}{2}\pi \qquad \theta = \frac{1}{4}\pi$

- Die Vektoren zeigen in Richtung der Koordinatenlinien (Längen- und Breitengrad).
- Es handelt sich um Tangentialvektoren (spannen die Tangentialebene auf)

Vektoranalysis

Tangentialvektoren

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Allgemeine Betrachtung:

Wir halten θ fest und lassen φ laufen → $\vec{r}$ läuft entlang der Breitenkreise

Wir fixieren φ und betrachten:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(\varphi_0,\theta_0) - \vec{r}(\varphi_0+\Delta\varphi,\theta_0)$$

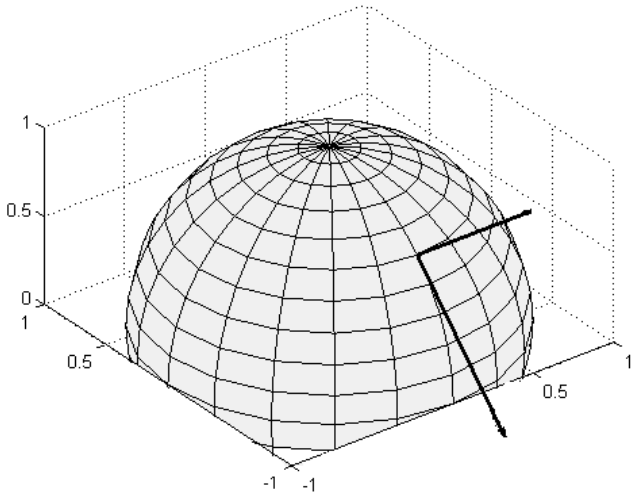
Im Grenzwert erhalten wir einen Tangentialvektor:

→ $$\partial_\varphi \vec{r}(\varphi_0,\theta_0) = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\vec{r}(\varphi_0,\theta_0) - \vec{r}(\varphi_0+\Delta\varphi,\theta_0)}{\Delta\varphi}$$

Vektoranalysis

Normalenvektor

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

Eigentlich benötigen wir den Normalenvektor und nicht die Tangentialvektoren…

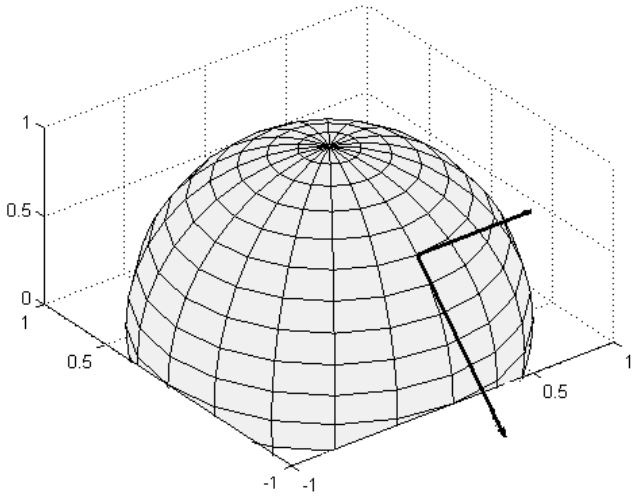
Wir nutzen aus, dass der Normalenvektor senkrecht auf den Tangentialvektoren steht…

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \partial_\theta \vec{r} \times \partial_\varphi \vec{r}$$

Vektoranalysis

Normalenvektor

Beispiel: Halbkugel mit R = 1



Parametrisierung der Halbkugel:

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

Für unsere Halbkugel erhalten wir…

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta\ \cos\varphi \\ \cos\theta\ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}}_{\partial_\theta \vec{r}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\partial_\varphi \vec{r}} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta\ \cos\varphi \\ \sin^2\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\ \cdot \vec{r}(\varphi,\theta)$$

Normalenvektor

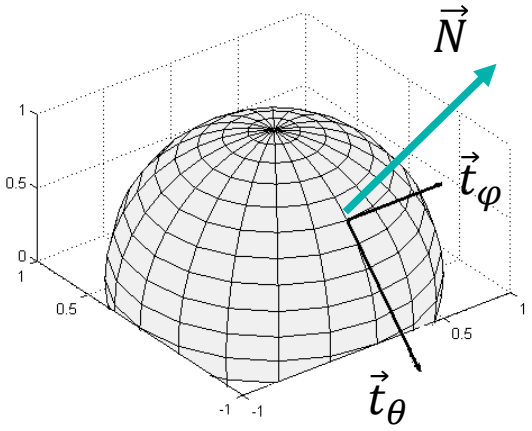
Bemerkung zum Normalenvektor

Vereinbarungsgemäß zeigt der Normalenvektor bei geschlossenen Flächen immer nach außen, was in unserem Beispiel der Fall ist.

Hätten wir jedoch stattdessen folgendes Kreuzprodukt berechnet, so würde der Normalenvektor nach innen zeigen…

$$\partial_\varphi \vec{r} \times \partial_\theta \vec{r} = -\vec{N}$$

Durch Vertauschen der Reihenfolge der Tangential-vektoren im Kreuzprodukt, können wir jedoch immer einen Normalenvektor erhalten, der nach außen zeigt.



Zusammenfassung: Normalenvektor

Satz:

Wir betrachten eine Fläche im Raum, die durch $\vec{r}(u,v)$ parametrisiert ist.

Dann erhalten wir die beiden Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien durch partielle Differentiation nach den Flächenparametern u und v:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

Zusammenfassung: Normalenvektor

Satz:

Wir betrachten eine Fläche im Raum, die durch $\vec{r}(u,v)$ parametrisiert ist.

Dann erhalten wir die beiden Tangentialvektoren entlang der Koordinatenlinien durch partielle Differentiation nach den Flächenparametern u und v:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

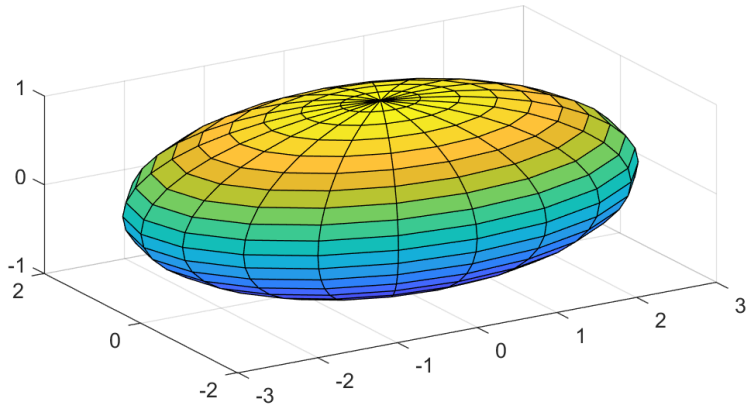
Den auf eins normierten Normalenvektor, der senkrecht auf $\vec{t}_u$ und $\vec{t}_v$ steht, erhalten wir dann aus dem Kreuzprodukt der beiden Tangentialvektoren:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{\left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right|}$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und den Normalenvektor des Ellipsoiden mit der Parametrisierung…

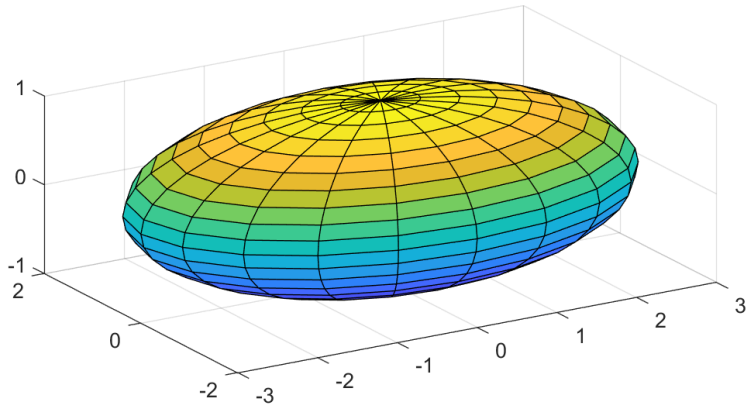


$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie die Tangentialvektoren und den Normalenvektor des Ellipsoiden mit der Parametrisierung…



$$\vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

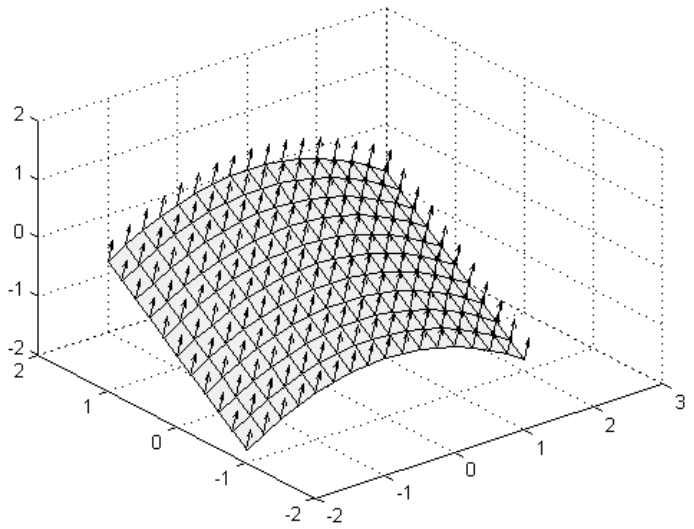
Lösung:

$$\partial_\theta \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \cos\theta \ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \vec{r}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -3 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin^2\theta \ \cos\varphi \\ 3 \cdot \sin^2\theta \ \sin\varphi \\ 6 \cdot \sin\theta \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



Zusammenfassung:

Wir suchen den Fluss eines Vektorfeldes $\vec{u}$ durch eine Fläche F.

Dies führte auf eine Riemannsumme über kleine, ebene Rechtecke.

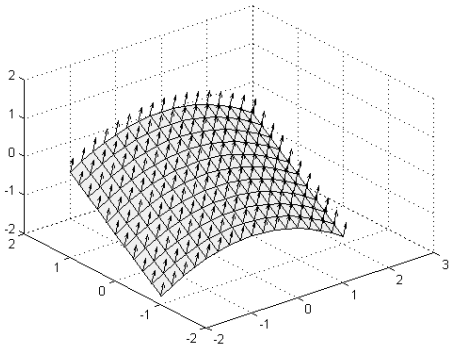
Der Grenzübergang liefert das *Oberflächenintegral*:

$$\Phi = \iint \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}A} = \iint \vec{u} \cdot \vec{N}\, dA$$

Aufgabe:

Wir müssen analog zum Wegintegral die Fläche parametrisieren und die Flächennormale bestimmen.

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



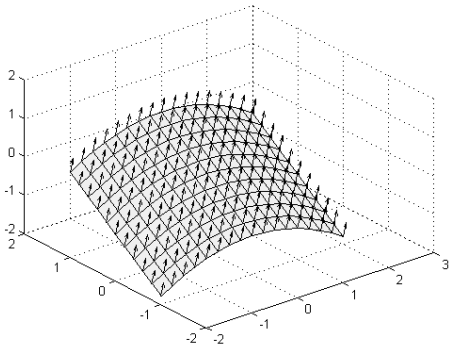
Algorithmus zur Berechnung:

1. Wir parametrisieren die Fläche:

   $\vec{r}(u,v)$ mit Parametern u und v

$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

1. Wir parametrisieren die Fläche:

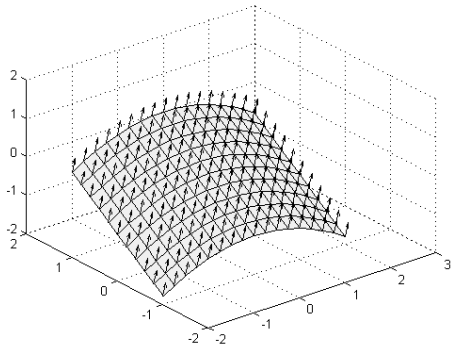
   $\vec{r}(u,v)$ mit Parametern u und v

2. Wir berechnen die beiden Tangentialvektoren:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

1. Wir parametrisieren die Fläche:

   $\vec{r}(u,v)$ mit Parametern u und v

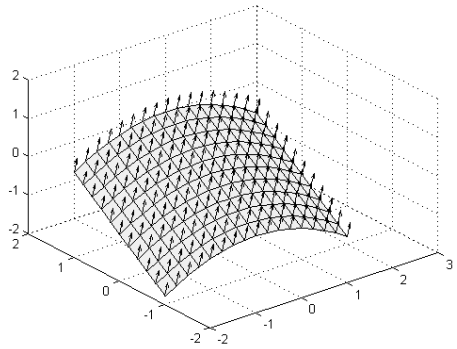
2. Wir berechnen die beiden Tangentialvektoren:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

3. Wir bestimmen den Normalenvektor (Kreuzprodukt):

$$\vec{N}(u,v) = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

1. Wir parametrisieren die Fläche:

   $\vec{r}(u,v)$ mit Parametern u und v

2. Wir berechnen die beiden Tangentialvektoren:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \qquad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$$

3. Wir bestimmen den Normalenvektor (Kreuzprodukt):

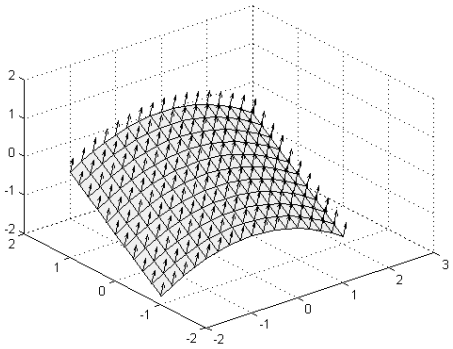
$$\vec{N}(u,v) = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$$

Bemerkung:

Wir werden gleich sehen, dass beim Oberflächenintegral keine Normierung nötig ist!

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

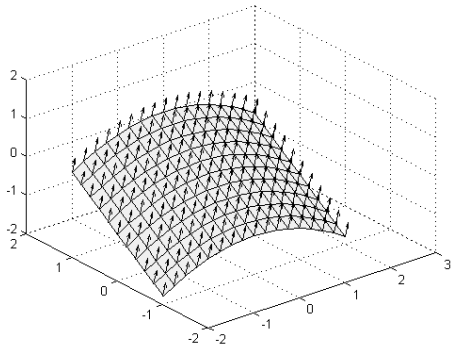
Algorithmus zur Berechnung:

4. Wir ersetzen den Normalenvektor und setzen die Parametrisierung für x_1, x_2 und x_3 ein.

   Flächenelement:

$$dA = \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

4. Wir ersetzen den Normalenvektor und setzen die Parametrisierung für x_1, x_2 und x_3 ein.

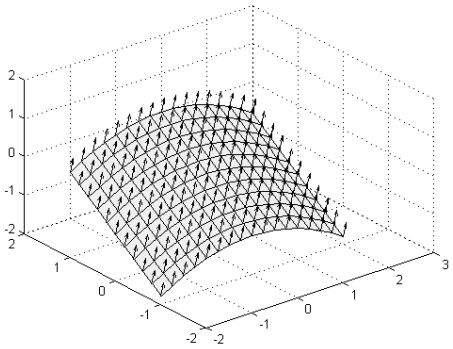
   Flächenelement:

$$dA = \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv$$

Vektorielles Flächenelement:

$$\overrightarrow{dA} = \vec{N} \cdot \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{\left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right|} \cdot \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv = \vec{t}_u \times \vec{t}_v \, du \, dv$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

4. Wir ersetzen den Normalenvektor und setzen die Parametrisierung für x_1, x_2 und x_3 ein.

   Flächenelement:

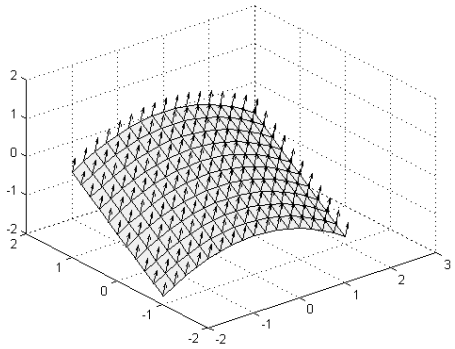
$$dA = \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv$$

Oberflächenintegral:

$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA = \iint \vec{F}(u,v) \cdot \left(\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right) du\, dv$$

Vektoranalysis

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche



$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA$$

Algorithmus zur Berechnung:

4. Wir ersetzen den Normalenvektor und setzen die Parametrisierung für x_1, x_2 und x_3 ein.

   Flächenelement:

$$dA = \left|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right| \cdot du \cdot dv$$

Oberflächenintegral:

$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dA = \iint \vec{F}(u,v) \cdot \left(\vec{t}_u \times \vec{t}_v\right) du\, dv$$

5. Das Ergebnis von 4. ist ein normales Doppelintegral, welches wir wie gewohnt lösen können.

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

Berechnung: Schritt 1 - Flächenparametrisierung

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

Berechnung: Schritt 2 - Tangentialvektoren

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\partial_\theta \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \cos\varphi \\ \cos\theta \ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \ \sin\varphi \\ \sin\theta \ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

Berechnung: Schritt 3 - Normalenvektor

$$\partial_\theta \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \cos\varphi \\ \cos\theta \ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \ \sin\varphi \\ \sin\theta \ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \ \cos\varphi \\ \cos\theta \ \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\theta \ \sin\varphi \\ \sin\theta \ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin\theta \ \cdot \vec{r}(\varphi, \theta)$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

Berechnung: Schritt 4 + 5 – Integral Transformieren + Ausrechnen

$$\Phi = \iint_A \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \overrightarrow{dA}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \sin\theta \, d\varphi d\theta$$

$$= \vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2 = 1$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Beispiel: radiales Vektorfeld $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fluss durch die Oberfläche der Vollkugel mit Radius R=1

Berechnung: Schritt 4 + 5 – Integral Transformieren + Ausrechnen

$$\Phi = \iint_A \vec{F}(x_1, x_2, x_3) \cdot \overrightarrow{dA}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \ \cos\varphi \\ \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \sin\theta \ d\varphi d\theta$$

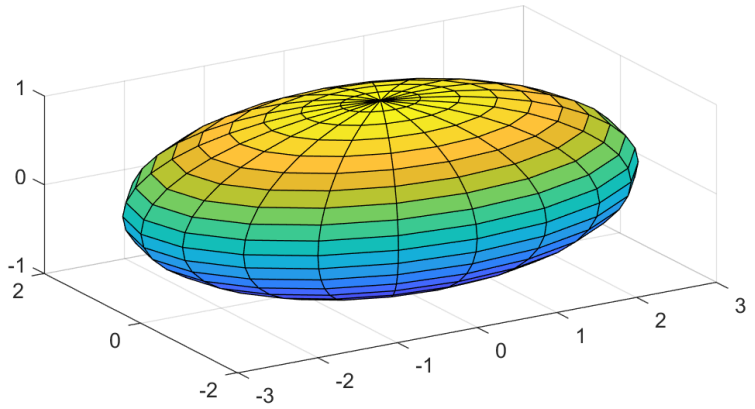
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \ d\varphi d\theta \quad = 4\pi$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche des Ellipsoiden für das radiale Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



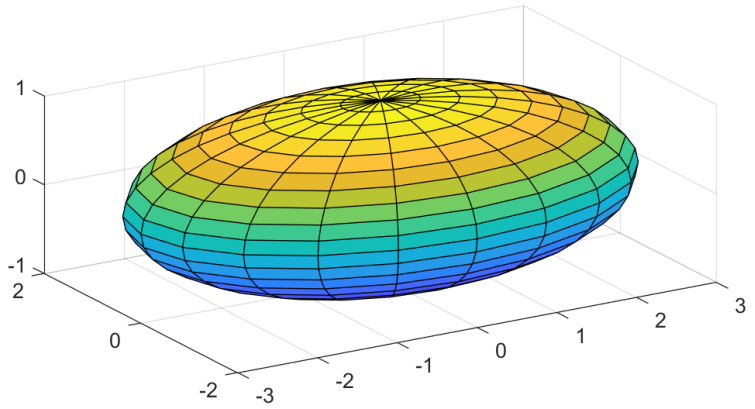
$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin^2\theta \ \cos\varphi \\ 3 \cdot \sin^2\theta \ \sin\varphi \\ 6 \cdot \sin\theta \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Fluss durch eine Fläche

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche des Ellipsoiden für das radiale Vektorfeld



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 3 \cdot \sin\theta \ \cos\varphi \\ 2 \cdot \sin\theta \ \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin^2\theta \ \cos\varphi \\ 3 \cdot \sin^2\theta \ \sin\varphi \\ 6 \cdot \sin\theta \ \cos\theta \end{pmatrix} d\theta \, d\varphi =$$

$$\vec{N}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin^2\theta \ \cos\varphi \\ 3 \cdot \sin^2\theta \ \sin\varphi \\ 6 \cdot \sin\theta \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 6 \ \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 24\pi$$